

На правах рукописи



БАДИЕВ МАГОМЕДЗАГИР КУРБАНОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ФРУСТРИРОВАННЫХ
МОДЕЛЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА МЕТОДАМИ МОНТЕ-КАРЛО**

01.04.07 – физика конденсированного состояния

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МАХАЧКАЛА, 2012

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте физики им. Х.И. Амирханова Дагестанского научного центра Российской Академии наук

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Муртазаев Акай Курбанович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Палчаев Даир Каирович

кандидат физико-математических наук, доцент Таскаев Сергей Валерьевич

Ведущая организация: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Защита состоится 20 марта 2012 г. в 15⁰⁰ на заседании диссертационного совета Д002.095.01 при Институте физики ДНЦ РАН по адресу: 367003, Махачкала, пр. Шамиля, 39-а.

Отзывы на автореферат просьба направлять по адресу: 367003, Махачкала, ул. М. Ярагского, 94, Институт физики ДНЦ РАН

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института физики ДНЦ РАН

Автореферат разослан 18 февраля 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук



Батдалов А.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современной физике магнитных явлений в последние десятилетия растет интерес к исследованию магнитных состояний веществ, по своим свойствам отличающихся от классических ферро-, ферри- и антиферромагнетиков. Такие магнитные структуры могут возникать по разным причинам. Среди этих состояний можно отметить магнитные структуры, образующиеся на треугольных решетках и других специфических типах решеток. В таких структурах конкуренция антиферромагнитных обменных связей может проявляться в геометрической фрустрации обменного взаимодействия, т.е. такого пространственного расположения магнитных ионов, при котором одновременное антипараллельное упорядочение всех взаимодействующих спинов невозможно. Результатом такого эффекта может быть формирование неколлинеарной магнитной структуры, а в случае сильной фрустрации – даже отсутствие дальнего магнитного порядка.

Очень интересны магнитные структуры, возникающие в низкоразмерных магнитных системах с антиферромагнитным обменным взаимодействием. Из-за сильных квантовых флуктуаций либо, опять-таки, вследствие конкуренции обменных взаимодействий в цепочке между ближайшими ионами и со вторыми соседями такие системы демонстрируют широкий спектр необычных магнитных структур.

Строгое исследование критических свойств данных систем требует разработки микроскопических моделей и методов их изучения.

Исследование трехмерных микроскопических гамильтонианов сложных систем методами современной теоретической физики – задача чрезвычайно сложная. Это привело к тому, что фазовые переходы (ФП) и критические явления (КЯ) интенсивно исследуются методами вычислительной физики (ВФ) – методами Монте-Карло (МК) и молекулярной динамики (МД) [1-3], которые позволяют успешно исследовать критические свойства систем со сложными реалистичными гамильтонианами в широком диапазоне температур и других внешних параметров.

Фрустрированные спиновые системы (ФС) являются довольно сложными объектами для исследования даже методами МК. Для ФС характерна проблема многочисленных долин локальных минимумов энергии. Обычные методы МК плохо справляются с решением этой проблемы. Поэтому в последнее время разработано много новых вариантов алгоритмов метода МК. Для решения этой проблемы наиболее мощными и эффективными оказались репличные алгоритмы метода МК [4].

Таким образом, исследование критических и термодинамических свойств, в частности фрустрированных спиновых систем, исходя из трехмерных микроскопических гамильтонианов, является **важной и актуальной** проблемой современной статистической физики решеточных систем, теории фазовых переходов и критических явлений.

Целью работы является исследование статических критических свойств моделей фрустрированных спиновых систем репличным алгоритмом метода

Монте-Карло. В процессе выполнения работы решались следующие основные задачи:

1. Разработка комплекса программ для ЭВМ, с помощью которого можно исследовать статические критические свойства моделей с фрустрациями;
2. Исследование методом Монте-Карло статических критических свойств фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с переменным межслойным обменным взаимодействием. Определение статических магнитных и киральных критических индексов теплоемкости α , намагниченности β , β_k , восприимчивости γ , γ_k и индекса радиуса корреляции ν и ν_k этой модели на основе теории конечно-размерного скейлинга (КРС);
3. Исследование критического поведения и зависимость критических индексов $3d$ фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке от типа межплоскостного обменного взаимодействия;
4. Исследование статического критического поведения трехмерной антиферромагнитной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей;
5. Проверка справедливости теории конечно-размерного скейлинга для фрустрированных моделей.

Практическая ценность работы.

Полученные в диссертации результаты по исследованию статических критических свойств фрустрированных спиновых моделей представляют интерес для дальнейших исследований в теории магнетизма, физики фазовых переходов и статистической физики конденсированного состояния. Разработанный комплекс программ для ЭВМ формирует базу, на основе которой возможны высокоточные исследования статических критических явлений в фрустрированных спиновых системах.

Использование репличного алгоритма метода МК для исследования моделей фрустрированных спиновых систем показало, что репличные алгоритмы являются ценным инструментом при исследовании ФС, позволяют определять с высокой степенью точности критические параметры системы и являются значительно более эффективными по сравнению с классическим алгоритмом (алгоритм Метрополиса). Эти алгоритмы успешно справляются с проблемой локальных энергетических минимумов, в решении которой другие алгоритмы метода МК (стандартный алгоритм Метрополиса, одно-кластерный алгоритм Вульфа) оказались малоэффективными.

Экспериментальные результаты данной работы используются для чтения спецкурсов: «Исследование фазовых переходов и критических явлений методами Монте-Карло», «Компьютерное моделирование в физике», «Методы вычислительной физики в магнетизме», а часть программ для ЭВМ при выполнении лабораторных работ по указанным спецкурсам в Дагестанском государственном университете.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследование критических свойств $3d$ фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга на треугольной решетке с переменным межслойным обменным взаимодействием. Расчитаны статические магнитные и киральные критические индексы теплоемкости α , намагниченности β , β_k , восприимчивости γ , γ_k и индексы радиуса корреляции ν и ν_k этой модели. Показана принадлежность $3d$ фрустрированной модели Гейзенберга на треугольной решетке к новому классу универсальности критического поведения.
2. Исследование магнитных и киральных статических критических свойств $3d$ фрустрированной модели Гейзенберга с различными типами межплоскостного обменного взаимодействия. Доказательство принадлежности $3d$ фрустрированных моделей Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с ферромагнитным и антиферромагнитным межплоскостным взаимодействием к одному и тому же классу универсальности критического поведения.
3. Результаты расчета магнитных и киральных критических индексов теплоемкости α , намагниченности β , β_k , восприимчивости γ , γ_k и радиуса корреляции ν , ν_k $3d$ фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей.
4. Результаты исследования характера и особенностей фазовых переходов в $3d$ фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей на основе высокоэффективного гистограмного метода МК.
5. Разработка сложного комплекса программ для ЭВМ, основанный на использовании современных высокоэффективных алгоритмов, позволяющий проводить высокоточные исследования статических критических явлений в моделях фрустрированных спиновых систем.

Научная новизна и значимость полученных в диссертации результатов обусловлена основными положениями, которые выносятся на защиту.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях, совещаниях, семинарах: 9-м международном симпозиуме «Упорядочение в металлах и сплавах» ОМА-9. Ростов-на-Дону – пос.Лоо, 2006; Международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала, 2007; 10-м международном симпозиуме «Упорядочение в минералах и сплавах» ОМА-10, v. II. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2007; V всероссийской конференции по физической электронике. Махачкала, 2008; VIII региональной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии. Уфа, 2008; 11-м международном симпозиуме «Порядок, беспорядок и свойства оксидов» ODPO-11, г. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2008; XXI-й международной

конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах». Москва, 2009; Межрегиональной научно-технической конференции памяти профессора Валеева К.А. «Актуальные проблемы естественных и технических наук». Уфа, 2009; Международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала, 2009; 12-м международном симпозиуме «Порядок, беспорядок и свойства оксидов» ODP0-12, г. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2009; V-й международной конференции студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». Томск, 2009; Региональной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии. Уфа, 2009; Международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала, 2010; XXXIII Международной зимней школе физиков-теоретиков «Коуровка-2010». Екатеринбург, 2010; IV Euro-Asian Symposium “Trends in MAGnetism”: Nanospintronics EASTMAG-2010; 13-м международном симпозиуме «Упорядочение в минералах и сплавах» OMA-13. г. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2010; 14-м международном симпозиуме «Упорядочение в минералах и сплавах» OMA-14. г. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2011; Moscow International Symposium on Magnetism «MISM». Moscow, 2011; Международной конференции «Инноватика-2011». Махачкала, 2011.

Результаты работы обсуждались на научных семинарах лаборатории вычислительной физики и физики фазовых переходов и общеинститутских семинарах (Институт физики ДНЦ РАН).

Достоверность результатов обеспечивается строгой математической обоснованностью использованных численных методов, применением надежной теоретической базы для интерпретации полученных данных и сравнением с имеющимися в литературе данными других авторов.

Личный вклад автора. Все основные результаты получены автором лично или при его активном участии. Обработка результатов и постановка численных экспериментов проведено лично автором диссертации. Обсуждение результатов и подготовка публикаций выполнено совместно с соавторами.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 36 работах, в том числе 12 статьях, опубликованных в российских и зарубежных научных изданиях, входящих в перечень журналов, утвержденных ВАК Минобрнауки РФ. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 156 страницах, иллюстрирована 77 рисунками и 6 таблицами. Список цитируемой литературы 145 ссылок.

Работа состоит из введения, трех глав, выводов и списка цитируемой литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, приводятся основные положения, выносимые на защиту, дается краткая аннотация по главам.

В главе I дано изложение классического метода Монте-Карло применительно к каноническому ансамблю.

В разделе 1.1 рассмотрен классический метод Монте-Карло применительно к каноническому ансамблю, а также практическая реализация процедуры метода Монте-Карло для систем с дискретным (модель Изинга) и непрерывным (модель Гейзенберга и XY-модель) распределением состояний. Также коротко рассмотрен вопрос о выборе начальной конфигурации системы.

Раздел 1.2 посвящен описанию решеточных моделей, наиболее часто используемых при исследованиях кооперативных явлений в решеточных системах. Рассматриваются модели как с дискретными состояниями спинов так и с непрерывным распределением состояний спинов (модель Гейзенберга). Здесь также кратко описаны некоторые модели ФС.

В разделе 1.3 рассмотрен стандартный алгоритм метода Монте-Карло, основанный на перевороте одного спина (алгоритм Метрополиса). Показано, что в критической области в фрустрированных системах этот алгоритм сталкивается с проблемой так называемого «критического замедления».

В разделе 1.4 дано описание репличного алгоритма метода МК. Этот алгоритм, в отличие от стандартного алгоритма метода МК, позволяет преодолеть проблему многочисленных долин локальных минимумов энергии, возникающая при исследовании ФС.

В разделе 1.5 рассмотрены различные виды граничных условий, применяемых для устранения погрешности, связанной с малостью исследуемой системы, возникающей при изучении систем, содержащих конечное число частиц.

В разделе 1.6 подробно анализируются ошибки, возникающие при моделировании методом Монте-Карло, и рассматриваются вопросы, связанные с оценкой погрешности метода Монте-Карло. Также в разделе приводятся меры, применяемые для исключения различных непредвиденных ошибок.

В главе II дается обзор современного состояния теоретических и экспериментальных исследований статических критических свойств фрустрированных спиновых систем и результаты полученные автором при исследовании трехмерной антиферромагнитной модели Гейзенберга с переменным межслойным обменным взаимодействием на слоистой треугольной решетке.

Раздел 2.1 посвящен обсуждению природы спиновых стекол и фрустрированных спиновых систем.

В разделе 2.2 показано, как возникает фрустрация на примере треугольной решетки.

Раздел 2.3 посвящен обсуждению литературных результатов экспериментальных и численных исследований критических свойств антиферромагнетиков на треугольной решетке.

В разделе 2.4. подробно изложены основные положения теории конечно-размерного скейлинга. Обсуждаются особенности определения статических критических индексов и критической температуры.

Идеи, заложенные в теории КРС, позволяют экстраполировать МК результаты, полученные для систем с конечными размерами к термодинамическому пределу. Согласно теории КРС, соотношения для теплоемкости, спонтанной намагниченности и восприимчивости, приходящих на один спин имеют вид [5,6]:

$$C(T, L) \sim L^{\alpha/\nu} C_0(tL^{1/\nu}), \quad (1)$$

$$m(T, L) \sim L^{-\beta/\nu} m_0(tL^{1/\nu}), \quad (2)$$

$$\chi(T, L) \sim L^{\gamma/\nu} \chi_0(tL^{1/\nu}), \quad (3)$$

где $t = |T - T_c|/T_c$ – приведенная температура, L – линейные размеры системы, α , β , γ и ν – статические критические индексы для системы с $L = \infty$, связанные скейлинговыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \gamma &= \beta(\delta - 1), & \alpha + 2\beta + \gamma &= 2, & (2 - \eta)\nu &= \gamma, \\ \delta &= \frac{2 - \alpha + \gamma}{2 - \alpha - \gamma}, & 2 - \alpha &= d\nu. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (1) – (3) хорошо воспроизводят критическое поведение бесконечных систем при $t \ll 1$ и $L \rightarrow \infty$.

Результаты исследования критических явлений фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга с переменным межслойным обменным взаимодействием приведены в разделе 2.5.

Гамильтониан этой модели может быть представлен в следующем виде [7]:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) - J' \sum_{\langle il \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_l), \quad (5)$$

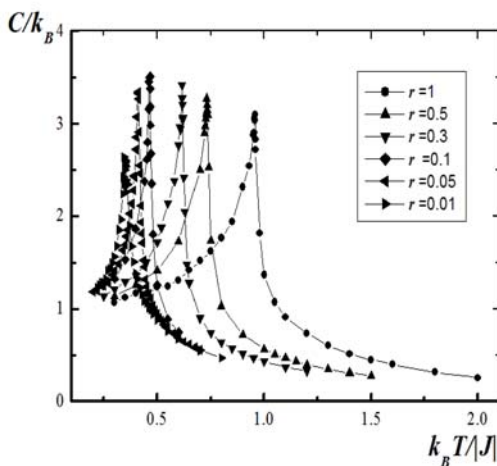


Рис.1. Зависимость теплоемкости C/k_B от температуры $k_B T/J$ для системы с $L = 30$ для разных r .

где \vec{S}_i – трехкомпонентный единичный вектор $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$, $J < 0$ и $J' > 0$ – константы обменного взаимодействия. $r = J'/J = 0.01 - 1.0$ – соотношение межслойного и внутрислойного обменов.

Первый член в формуле (5) характеризует внутрислойное антиферромагнитное взаимодействие спинов, а второй – межслойное ферромагнитное. Фрустрации в этой

модели обусловлены геометрией решетки.

Для исследования данной модели нами использовался репличный алгоритм метода Монте-Карло [4]. Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями (ПГУ) и с линейными размерами $L \times L \times L = N$, $L = 12 \div 42$.

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости и восприимчивости нами использовались выражения [8]:

$$C = (NK^2) \left(\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2 \right), \quad (6)$$

$$\chi = \begin{cases} (NK) \left(\langle m^2 \rangle - \langle |m| \rangle^2 \right), & T < T_c \\ (NK) \langle m^2 \rangle, & T \geq T_c \end{cases}, \quad (7)$$

где $K = |J|/k_B T$, N – число частиц, U – внутренняя энергия, m – подрешеточная намагниченность.

На рис.1 представлены характерные зависимости теплоемкости C от температуры для систем с линейными размерами $L=30$ для разных r . Отметим, что в зависимости теплоемкости C от температуры для всех r вблизи критической температуры наблюдаются хорошо выраженные максимумы. При этом уменьшение соотношения межслойного и внутрислойного обменов ведет к уменьшению температуры фазового перехода и, соответственно, смещению максимумов теплоемкости в сторону низких температур.

Для определения критической температуры T_N , нами использовался метод кумулянтов Биндера четвертого порядка [9,10]:

$$U_L = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle_L}{3 \langle m^2 \rangle_L^2}. \quad (8)$$

Согласно теории конечно-размерного скейлинга точка пересечения всех кривых U_L в их температурной

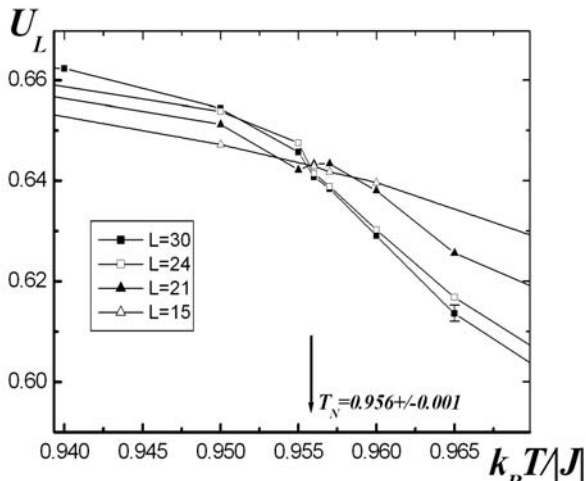


Рис.2. Зависимость кумулянта биндера U_L от температуры $k_B T / |J|$ для $r=1$.

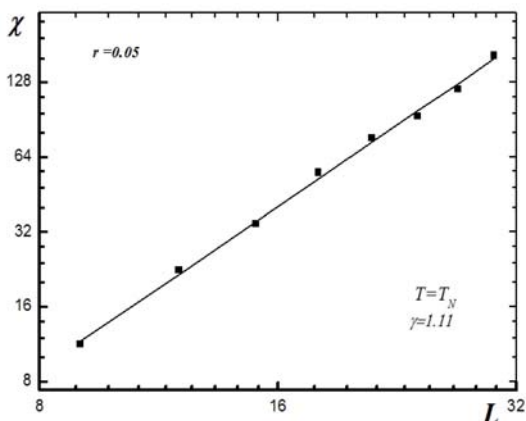


Рис.3. Зависимость магнитной восприимчивости χ от линейных размеров системы L при $T=T_N$ для $r=0.05$.

зависимости является критической точкой. На рис.2. представлены характерные зависимости U_L от температуры $k_B T / |J|$ для $r = 1$. Из графиков видно, что критическая температура $T_N = 0.956(1)$.

Построив аналогичные зависимости, были определены значения критических температур для всех остальных $r = 0.01 - 1.0$.

При расчете магнитных и киральных критических индексов намагниченности β, β_k , восприимчивости χ, χ_k и теплоемкости α использовались следующие выражения [1,8,11]:

$$m \approx L^{-\beta/\nu}, \quad (9)$$

$$m_k \approx L^{-\beta_k/\nu_k} \quad (10)$$

$$\chi \approx L^{\gamma/\nu}, \quad (11)$$

$$\chi_k \approx L^{\gamma_k/\nu_k} \quad (12)$$

$$C_{\max}(L) = C_{\max}(L = \infty) - aL^{\alpha/\nu}, \quad (13)$$

Эти соотношения позволяют легко определить $\beta/\nu, \beta_k/\nu_k, \gamma/\nu, \gamma_k/\nu_k$ и α/ν (см.рис.3).

Для определения критического индекса радиуса корреляции ν и ν_k нами использовались следующее выражение [9]:

$$V_n = L^{1/\nu} g_{V_n}, \quad (14)$$

$$V_{nk} = L^{1/\nu_k} g_{V_{nk}} \quad (15)$$

где $g_{V_n} = \text{Const}$, а в качестве V_n

может выступать:

$$V_n = \frac{\langle m^n E \rangle}{\langle m^n \rangle} - \langle E \rangle, \quad (n=1,2,3). \quad (16)$$

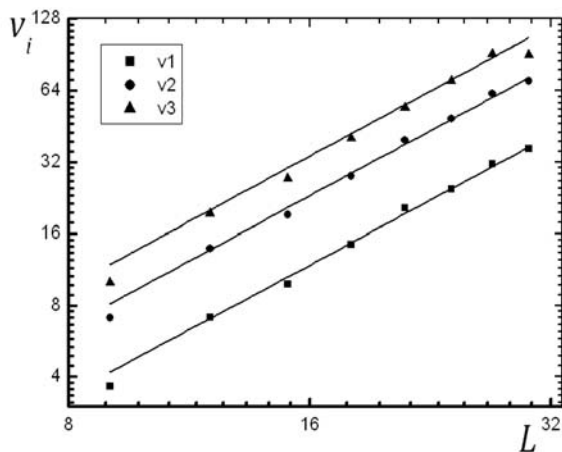


Рис.4. Зависимость параметров V_i от линейных размеров системы при $T = T_N$ для $r = 0.05$.

На рисунке 4 в двойном логарифмическом масштабе представлены характерные зависимости величины V_n , от линейных размеров решетки L . Как видно из рисунка все данные ложатся на прямую, угол наклона

кривой определяет значение $1/\nu$. По этой схеме нами определены значения ν и ν_k для всех $r=0.01-1.0$.

Затем, по аналогичной схеме были построены характерные зависимости для теплоемкости C , магнитного и кирального параметра порядка m , m_k , магнитной и киральной восприимчивости χ , χ_k от линейных размеров решетки L для всех r и вычислены значения критических индексов, которые представлены в таблице 1 и 2. Как видно из таблиц 1 и 2 значения индексов для разных r в интервале от $r = 1.0$ до $r = 0.075$ практически не зависят от r и в пределах погрешности совпадают. При этом соотношения скейлинга между критическими индексами α , β, β_k , γ и γ_k выполняется с достаточно высокой степенью точности.

Однако, как только r становится меньше 0.075, мы наблюдаем резкое изменение значений всех индексов. Это изменение сопровождается и нарушением скейлингового соотношения между индексами α , β , β_k , γ и γ_k . Таким образом, характер критического поведения этой модели не меняется в пределах значений r от 1.0 до 0.075. По видимому, значение $r = 0.075$ можно считать границей, после которой в системе начинается происходить кроссовер от трехмерного критического поведения к квазидвумерному.

Таблица 1. Значения магнитных критических параметров для модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с переменным межслойным обменным взаимодействием.

r	T_N	ν	α	β	γ	$\alpha+2\beta+\gamma=2$
1	0.956(1)	0.59(2)	0.26(2)	0.27(2)	1.23(3)	2.03
0.8	0.872	0.60	0.24	0.26	1.26	2.02
0.6	0.783	0.59	0.22	0.29	1.22	2.02
0.3	0.619	0.60	0.26	0.29	1.23	2.07
0.1	0.468	0.59	0.24	0.28	1.17	1.97
0.075	0.442	0.55	0.26	0.24	1.23	1.97
0.05	0.413	0.55	0.15	0.22	1.11	1.70
0.01	0.353	0.48	0.09	0.27	0.82	1.45

Таблица 2. Значения киральных критических параметров для модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с переменным межслойным обменным взаимодействием.

r	T_k	ν_k	α	β_k	γ_k	$\alpha+2\beta_k+\gamma_k=2$
1	0.956(2)	0.59(2)	0.26(2)	0.43(2)	0.87(3)	1.99
0.8	0.872	0.60	0.24	0.42	0.96	2.04
0.6	0.783	0.59	0.22	0.46	0.85	1.99
0.3	0.619	0.60	0.26	0.48	0.81	2.03
0.1	0.468	0.59	0.24	0.47	0.82	2
0.075	0.442	0.55	0.26	0.42	0.87	1.97
0.05	0.413	0.55	0.15	0.31	0.60	1.37
0.01	0.353	0.48	0.09	0.40	0.52	1.41

В главе III эффективным репличным алгоритмом метода Монте-Карло исследуется магнитное и киральное статическое критическое поведение $3d$ фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с ферромагнитным и антиферромагнитным обменным взаимодействием между плоскостями и модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с учетом взаимодействия вторых ближайших соседей.

В разделе 3.1 приводятся результаты исследований $3d$ модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с различными типами межплоскостного обменного взаимодействия.

Модель Гейзенберга на слоистой треугольной решетке является фрустрированной магнитной системой. Эта модель может быть представлена в виде трехмерной решетки, которая состоит из двумерных треугольных слоев сложенных по ортогональной оси. Гамильтониан этой системы представлен выражением [7]:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) - J' \sum_{\langle il \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_l), \quad (17)$$

где \vec{S}_i – трехкомпонентный единичный вектор $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$, J и J' - константы обменного взаимодействия.

Первый член в формуле (17) характеризует внутрислоистое взаимодействие спинов, а второй – межслоистое.

Для выяснения влияния типа межслоистого обменного взаимодействия на характер критического поведения рассмотрены две модели – D1 и D2:

Модель D1 – $J < 0, J' > 0, |J| = |J'|$.

Модель D2 – $J < 0$ и $J' < 0, |J| = |J'|$.

Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями и с линейными размерами $L_x L_y L_z = N$, $L = 12 \div 42$. При каждом конкретном значении L для усреднения термодинамических параметров использовались 20 марковских цепей стартующих из различных случайных начальных конфигураций. В каждой цепи длина равновесного участка в 100 раз превышала длину неравновесного. Полученные таким образом значения термодинамических параметров усреднялось по всем 20 конфигурациям.

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости и восприимчивости нами использовались выражения (6,7).

Параметр порядка системы m вычислялся по формуле [7]:

$$m = \frac{3}{N} \sqrt{\langle M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 \rangle / 3}, \quad (18)$$

где M_A, M_B и M_C - намагниченности трех подрешеток, соответственно.

Намагниченность подрешетки вычисляется следующим образом [7]:

$$\langle |\bar{M}_r| \rangle = \langle \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \rangle, r = A, B, C. \quad (19)$$

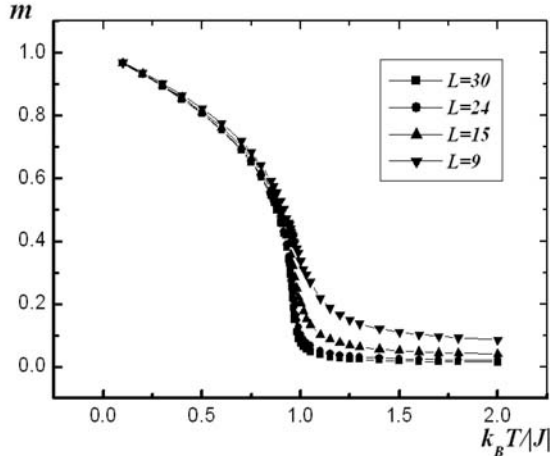


Рис.5. Зависимость магнитного параметра порядка от температуры $k_B T / J$ для модели $D1$.

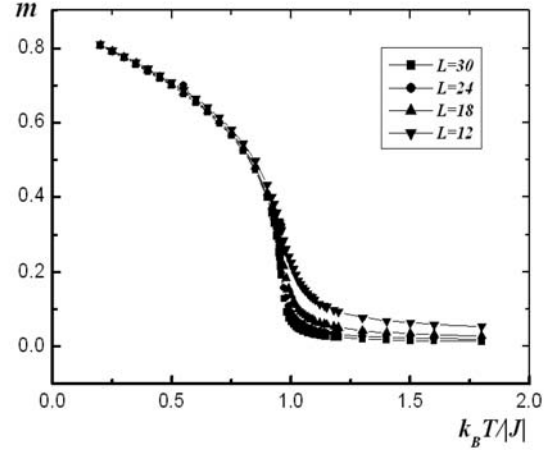


Рис.6. Зависимость магнитного параметра порядка от температуры $k_B T / J$ для модели $D2$.

На рисунке 5 и 6 представлены характерные зависимости магнитного параметра порядка m от температуры для систем с линейными размерами $L=9-30$ для модели $D1$ и $D2$. Отметим, что эти рисунки демонстрируют возникновения магнитного упорядочения при низких температурах. С ростом температуры параметры порядка m плавно уменьшаются. При приближении к критической температуре происходит резкий спад. Можно отметить, что в высокотемпературной фазе для параметра m при малых значениях линейных размеров системы L наблюдаются заметные высокотемпературные «хвосты», которые с ростом L становятся существенно меньше. По данным представленным на этих рисунках можно отметить, что температуры фазовых переходов для обеих моделей совпадают или очень близки.

Для определения магнитной критической температуры T_N нами использовался метод кумулянтов Биндера U_L четвертого порядка [9,10], который определяется выражением (8).

В разделе 3.2 приведены соотношения теории конечно-размерного скейлинга на основе, которых выполняется расчет статических магнитных и киральных критических индексов теплоемкости α , восприимчивости γ , γ_k , намагниченности β , β_k и радиуса корреляции ν , ν_k . Анализ данных проводился с учетом коррекции к скейлингу.

Из соотношений КРС следует, что в системе с размерами $L \times L \times L$ при $T=T_N$ и достаточно больших L выполняются следующие выражения [12,13]:

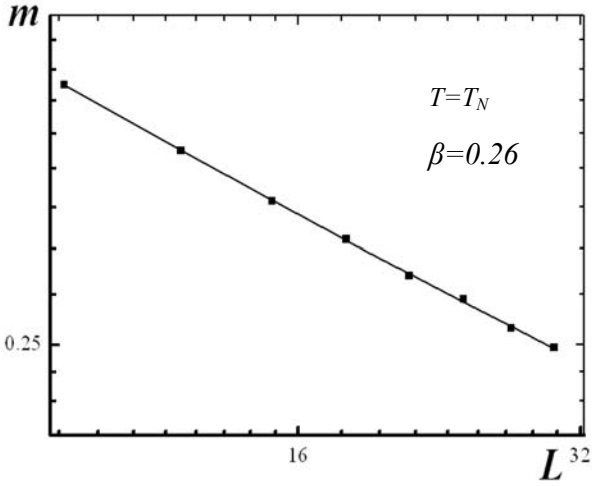


Рис.7.Зависимость магнитного параметра порядка m от линейных размеров системы L при $T=T_N$ для модели $D1$.

$$m \sim L^{-\beta/\nu} [1 + b_1 L^{-\omega}], \quad (20)$$

$$m_k \sim L^{-\beta_k/\nu_k} [1 + b_2 L^{-\omega}], \quad (21)$$

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu} [1 + b_3 L^{-\omega}], \quad (22)$$

$$\chi_k \sim L^{\gamma_k/\nu_k} [1 + b_4 L^{-\omega}], \quad (23)$$

$$V_i \sim L^{1/\nu} g_{V_i} [1 + b_5 L^{-\omega}], \quad (24)$$

$$V_{ki} \sim L^{1/\nu_k} g_{V_{ki}} [1 + b_6 L^{-\omega}], \quad (25)$$

где $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – амплитуды коррекции к скейлингу, ω – индекс поправки к конечно-размерному скейлингу, g_{V_i} – некоторая постоянная. Вместо V_i выступает соотношение (16), а в качестве V_{ki} использовали следующее выражение:

$$V_{ki} = \frac{\langle m_k^i E \rangle}{\langle m_k^i \rangle} - \langle E \rangle, \quad (i=1,2,3,4). \quad (26)$$

В качестве поправки к КРС нами использовалось значение $\omega=0.78$, которое соответствует для чистой модели Гейзенберга [12].

На рис.7 в двойном логарифмическом масштабе представлена характерная зависимость магнитного параметра порядка m от линейных размеров решетки L для модели $D1$. Как видно из рисунка все точки на графике в пределах погрешности хорошо ложатся на прямую. Угол наклона прямой определяет значение β/ν . По этой схеме определены значения $\alpha/\nu, \beta/\nu, \beta_k/\nu_k, \gamma/\nu$ и γ_k/ν_k для обеих моделей.

Особо следует отметить процедуру использованную нами для определения индекса Фишера η и η_k . С помощью отношений между восприимчивостью χ и радиусом корреляции ξ

$$\chi \propto \xi^{\gamma/\nu}, \quad (27)$$

а также соотношения $\eta = 2 - \gamma/\nu$, связывающего индексы η и ν , получим

$$\ln(\chi/\xi^2) = c - \eta \ln \xi, \quad (28)$$

где c – некоторая константа. Для систем с конечными размерами $\xi = L$, тогда при $T = T_N$ имеем

$$\ln(\chi/L^2) = c - \eta \ln L. \quad (29)$$

Значения всех индексов, для моделей D1 и D2, рассчитанные по вышеупомянутой схеме представлены в таблице 3.

Таблица 3. Значения критических параметров для трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с учетом поправки к скейлингу.

Модель	α	β	γ	ν	β_k	γ_k	ν_k	η	η_k	$\alpha+2\beta+\gamma=2$	$\alpha+2\beta_k+\gamma_k=2$
D1 $\omega=0.78$	0.22(2)	0.26(2)	1.26(2)	0.57(2)	0.44(3)	0.87(3)	0.57(3)	-0.09(3)	0.50(5)	2	1.97
D2 $\omega=0.78$	0.21(2)	0.24(2)	1.28(2)	0.59(2)	0.46(3)	0.85(3)	0.59(3)	-0.06(3)	0.63(5)	1.97	1.98
Эксп-т	0.39(9)	0.25(1)	1.10(5)	-	0.44(2)	0.84(7)	-			1.99	2.11
Метод МК	0.24(8)	0.30(2)	1.17(7)	0.59(2)	0.55(2)	0.72(2)	0.60(2)			2.01	2.06
Heisenberg model	-0.116	0.36	1.387	0.705	-	-	-			1.99	-

Как видно из таб.3. значения статических магнитных и киральных критических индексов для модели D1 и D2 в пределах погрешности практически совпадают. При этом скейлинговые соотношения между критическими индексами выполняются достаточно хорошо. Это дает нам основание утверждать, что класс универсальности критического поведения моделей D1 и D2 совпадает. Следовательно, характер критического поведения трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке не зависит от типа межплоскостного обменного взаимодействия. Кроме того, численные значения критических индексов для данной модели убедительно свидетельствуют о том, что эти модели образуют новый киральный класс универсальности критического поведения. Для сравнения в таб.3. представлены экспериментальные и Монте-Карло результаты для аналогичных систем. В последней строке таблицы приведены значения критических индексов полученных теоретическими методами.

В разделе 3.3 рассматриваются результаты, полученные при исследовании фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с учетом взаимодействия вторых ближайших соседей.

Гамильтониан для этой модели выглядит так:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) - J_1 \sum_{\langle il \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_l), \quad (30)$$

Изучено критическое поведение данной модели при разных значениях величины $R=|J_1/J|$, где R – величина взаимодействия вторых ближайших соседей. Нами рассмотрены случаи, когда $R = 0.0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.115$.

Для наблюдения за температурным ходом теплоемкости, восприимчивости и намагниченности использовались флуктуационные соотношения (6), (7), (18).

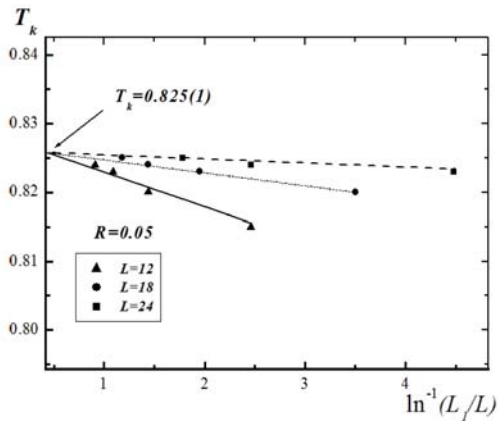


Рис.8. Зависимость температуры T_k от $\ln^{-1}(L_1/L)$ при $L=12;18;24$ для $R=0.05$.

Температуры фазовых переходов для всех R были найдены используя высокоточный метод кумулянтов Биндера U_L четвертого порядка (8).

Использование аналогичной процедуры для определения киральной критической температуры T_k дает существенно менее точные значения. Поэтому для определения T_k нами использовался метод пересечения кумулянтов (cumulant crossing), который считается более точным и надежным [8].

В соответствии с этим методом зависимости кумулянтов $U_L(T)$ для систем разных размеров строятся в приведенных масштабах $\ln^{-1}(L_1/L)$, где L_1 и L размеры двух систем, при этом $L_1 > L$. Экстраполяция данных T_k при $\ln^{-1}(L_1/L) \rightarrow 0$ соответствует критической температуре для бесконечной системы $T_k(L \rightarrow \infty)$.

Характерная зависимость температуры T_k от величины $\ln^{-1}(L_1/L)$ для $L=12, 18, 24$ при $R=0.05$ представлена на рис.8. Из рисунка видно, что при $\ln^{-1}(L_1/L) \rightarrow 0$ все зависимости для разных L сходятся к одной точке. Значения T_k в этой точке соответствует киральной критической температуре $T_k=0.825(2)$. По аналогии нами были определены значения критических температур и для всех остальных R , которые представлены в таблице 3. Обращает внимание на себя тот факт, что значения магнитной T_N и киральной критической температуры T_k для соответствующих значений R в пределах погрешности совпадают.

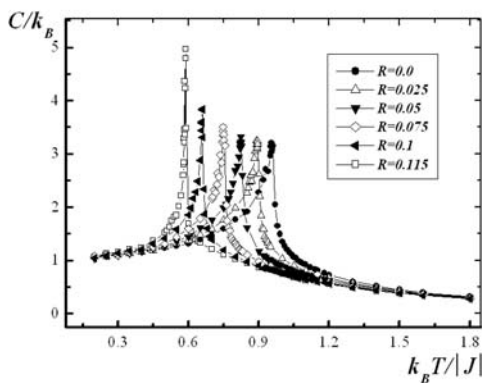


Рис.9. Зависимость теплоемкости C/k_B от температуры $k_B T/J$ для $L=30$.

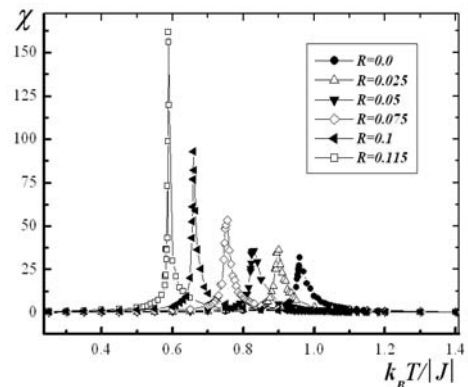


Рис.10. Зависимость восприимчивости χ от температуры $k_B T/J$ для $L=30$.

Температурные зависимости для теплоемкости и восприимчивости приведены на рисунках 9 и 10. Отметим, что рост значения R сопровождается сдвигом максимумов в сторону более низких температур, одновременно с этим наблюдается рост абсолютных значений максимумов, как теплоемкости, так и восприимчивости. Очевидно, что это связано с усилением конкурирующих взаимодействий вторых ближайших соседей, вследствие чего система становится более восприимчивой.

Для расчета эффективных магнитных и киральных критических индексов теплоемкости α , намагниченности β , β_k , восприимчивости γ , γ_k и индекса радиуса корреляции ν , и ν_k . воспользовались соотношениями КРС (9) - (15).

Из данных представленных в таблице 4 и 5 следует, что трехмерная антиферромагнитная фрустрированная модель Гейзенберга с взаимодействием вторых ближайших соседей в пределах значений $R = 0.0 \div 0.075$ не меняет характер своего критического поведения. При значении $R \geq 0.1$ наблюдается довольно резкое изменение значений и магнитных и киральных критических индексов. Кроме того, при $R=0.115$ соотношения Рашбрука для киральных критических индексов не выполняется совсем. Все эти особенности при $R \geq 0.075$, по видимому, связаны с близостью к мультикритической точке, где сосуществуют антиферромагнитная, коллинеарная и парамагнитная фаза.

Таблица.4. Значения эффективных магнитных критических индексов для трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с учетом взаимодействия вторых ближайших соседей.

R	T_N	ν	α	β	γ	η	$\alpha+2\beta+\gamma=2$
0	0.957(2)	0.65(1)	0.18(2)	0.28(2)	1.27(2)	-0.06(6)	2.01
0.025	0.893	0.65	0.20	0.28	1.27	-0.11	2.03
0.05	0.824	0.65	0.22	0.28	1.26	-0.15	2.04
0.075	0.747	0.65	0.22	0.25	1.28	-0.24	2
0.1	0.657	0.64	0.27	0.23	1.30	-0.30	2.03
0.115	0.588	0.50	0.46	0.20	1.21	-0.15	2.07

Таблица.5. Значения эффективных киральных критических индексов для трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с учетом взаимодействия вторых ближайших соседей.

R	T_k	ν_k	α	β_k	γ_k	η_k	$\alpha+2\beta_k+\gamma_k=2$
0	0.957(2)	0.65(2)	0.18	0.50(3)	0.83(4)	0.70(12)	2.01
0.025	0.893	0.65	0.20	0.49	0.89	0.50	2.06
0.05	0.824	0.65	0.22	0.46	0.92	0.44	2.06
0.075	0.747	0.65	0.22	0.43	0.98	0.33	2.06
0.1	0.657	0.64	0.27	0.36	1.07	0.11	2.06
0.115	0.588	0.50	0.46	0.35	1.26	0.03	2.4

В заключении представлены обобщающие выводы по результатам диссертационной работы.

Основные результаты работы.

1. Проведено исследование критических свойств фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с переменным межслойным обменным взаимодействием. Рассчитаны статические магнитные и киральные критические индексы теплоемкости α , намагниченности β , β_k , восприимчивости γ , γ_k , и индекс радиуса корреляции ν и ν_k .
2. Изучен и установлен характер критического поведения фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке в зависимости от величины межслойного обменного взаимодействия. Обнаружено, что класс универсальности критического поведения этой модели не меняется вплоть до значения межслойного обменного взаимодействия $r=0.05$. При дальнейшем уменьшении величины r , по-видимому, наблюдается переход от трехмерного поведения к квазидвумерному.
3. Получены температурные зависимости основных термодинамических функций $3d$ фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с ферро- и антиферромагнитными типами межплоскостного взаимодействия. Рассчитаны статические магнитные и киральные критические индексы теплоемкости α , восприимчивости γ , γ_k , параметров порядка β , β_k и радиуса корреляции ν , ν_k .
4. Показано, что $3d$ фрустрированная модель Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с ферро- и антиферромагнитными типами межплоскостного взаимодействия принадлежат к одному и тому же классу универсальности и образуют новый киральный класс универсальности критического поведения.
5. Проведены исследования $3d$ фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей. Рассчитаны все основные эффективные магнитные и киральные критические индексы.
6. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей.
7. Разработан комплекс программ для ЭВМ, с помощью которого можно исследовать статические критические свойства фрустрированных спиновых моделей.
8. Подтверждена эффективность применения репличного алгоритма метода Монте-Карло для исследования фрустрированных спиновых систем на слоистых треугольных решетках.

Цитированная литература.

1. Камиллов И.К., Муртазаев А.К., Алиев Х.К. Исследование фазовых переходов и критических явлений методами Монте-Карло // УФН. – 1999. – 169, №7. – С. 773–795.
2. Landau D.P. Computer simulation studies of critical phenomena // Physica A. – 1994. – V. 205. – P.41 – 64.

3. Binder K., Luijten E. Monte Carlo tests of renormalization-group predictions for critical phenomena in Ising models // Phys. Reports. – 2001. – V. 344. – P.179-253.
4. Mitsutake A., Sugita Y., Okamoto Y. Generalized-Ensemble Algorithms for Molecular Simulations of Biopolymers // preprint cond-mat/0012021.
5. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления // Пер. с англ. А.И. Мицека, Т.С. Шубиной; Под ред. С.В. Вонсовского. – М.: Мир, 1973.
6. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике // Пер. с англ. Е.П. Вольского, Л.И. Дайхина; Под ред. А.М. Бродского. – М.: Мир, 1985.
7. Kawamura H. New Critical Behavior I–Heisenberg Antiferromagnet on the Layered-Triangular Lattice. // J. Phys. Soc. Jap. – 1987. – V.56, N.2. – P.474–491.
8. Mailhot A., Plumer M.L., Caille A. Finite-size scaling of the frustrated model on a hexagonal lattice // Phys. Rev. B. – 1994-II. – V.50, N.10. – P.6854-6858.
9. Binder K., Luijten E. Monte Carlo tests of renormalization-group predictions for critical phenomena in Ising models // Phys. Reports. – 2001. – V. 344. – P.179-253.
10. Биндер К. Методы Монте-Карло в статистической физике / Пер. с англ. В.Н. Новикова, К.К. Сабельфельда; Под ред. Г.И. Марчука, Г.А. Михайлова. – М.: Мир, 1982. – 400 с.
11. Landau D.P. Computer simulation studies of critical phenomena // Physica A. – 1994. – V. 205. – P.41 – 64.
12. Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. Critical exponents from field theory // Phys. Rev. B 21, 3976 (1980).
13. Ballesteros H.G., Fernandez L.A., Martin-Mayor V. et al. Critical exponents of the three-dimensional diluted Ising model // Phys. Rev. B. 58, 2740 (1998).

Публикации по теме диссертации

В изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Статическое критическое поведение трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с переменным межслойным обменным взаимодействием // ЖЭТФ. – 2007. Т.132, № 5, С.1152-1159.
2. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование фрустрированной модели Гейзенберга с переменным межслойным обменным взаимодействием // Известия РАН. Серия физическая. – 2008. Т. 72, № 8, С. 1186-1189.
3. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Абуев Я.К., **Бадиев М.К.** Исследование критических свойств антиферромагнитной модели Гейзенберга методом Монте-Карло // Вестник ДГУ. – 2008. № 6, С. 5-10.
4. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К. **Бадиев М.К.** Исследование критических свойств трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга на треугольной решетке методами Монте-Карло // ФНТ. – 2009. Т.35, №7, С.663-669.
5. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование влияния фрустраций на критические свойства трехмерной антиферромагнитной модели Гейзенберга // Радиотехника и Электроника. – 2009. Т.54, №2, С.202-207.
6. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование критических свойств фрустрированной модели Гейзенберга на треугольной решетке

методом Монте-Карло // Известия РАН. Серия физическая. – 2009. Т.73, №7, С.1059-1061.

7. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование фазовых переходов фрустрированной модели Гейзенберга на треугольной решетке методами Монте-Карло // ФТТ. – 2010. Т.52, №8. С.1557-1562.
8. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Фрустрированной антиферромагнетик Гейзенберга на треугольной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // Известия РАН. Серия физическая. – 2010. Т.74, №8, С.1189-1191.
9. Муртазаев А.К., Камилов И.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Критические свойства фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке // Вестник ДНЦ – 2010 . Т. 37, С.5-10.
10. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Критические свойства антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // ФНТ. – 2011. Т. 37, С. 1258-1263.
11. Kassan-Ogly F.A., Filippov B.N., Men'shenin V.V., Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., **Badiev M.K.** Frustrations and phase transitions in Ising model on 2D lattices // Solid state phenomena. – 2011. V. 168-169. P. 435-438.
12. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Компьютерное моделирование фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке // Известия РАН. Серия физ. – 2011. Т. 75, С. 1103-1105.

В других изданиях:

13. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование фрустрированной модели Гейзенберга с переменным межслойным обменным взаимодействием. // 9-й международный симпозиум «Упорядочение в металлах и сплавах» ОМА-9, в. II. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2006. – С.63-65.
14. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Критическое поведение и пространственный кроссовер в фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга на треугольной решетке // 10-й международный симпозиум «Упорядочение в минералах и сплавах» ОМА-10, в. II. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2007. – С.68-70.
15. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование критических свойств фрустрированной модели Гейзенберга на треугольной решетке методом Монте – Карло. // 11-й международный симпозиум «Порядок, беспорядок и свойства оксидов» ODPO – 11, в. II. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2008. – С.298-300.
16. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Фрустрированный антиферромагнетик Гейзенберга на треугольной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // 12-й международный симпозиум «Порядок, беспорядок и свойства оксидов» ODPO-12. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2009. в. II. С.52-54.
17. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Компьютерное моделирование фрустрированной антиферромагнитной модели

- Гейзенберга на слоистой треугольной решетке // 13-й международный симпозиум «Упорядочение в минералах и сплавах» ОМА-13. Ростов-на-Дону - пос.Лоо, 2010. v. II. С.100-102.
18. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Критические свойства двумерной антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // 14-й международный симпозиум «Упорядочение в минералах и сплавах» ОМА-14. Ростов-на-Дону - пос.Лоо. 2011. v. II. С. 52-55.
 19. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К. **Бадиев М.К.** Критическое поведение трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга с взаимодействиями вторых ближайших соседей // Сборник трудов XXI международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах». Москва, 2009. С.761-763.
 20. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Фазовые переходы и критические свойства спиновых систем с фрустрациями // Материалы XXXIII Международной зимней школы физиков-теоретиков «Коуровка-2010». Екатеринбург, 2010. С.51-52.
 21. Kassan-Ogly F.A., Filippov B.N., Men'shenin V.V., Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., **Badiev M.K.** Frustrations and phase transitions in Ising model on 2D lattices // IV Euro-Asian Symposium "Trends in MAGnetism": Nanospintronics EASTMAG-2010. 2010. P.360
 22. Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., **Badiev M.K.** Phase transition in frustrated Heisenberg antiferromagnet on a triangular lattice with next-nearest neighbor interactions // Book of Abstracts MISM. Moscow. 2011. P. 516.
 23. Kassan-Ogly F.A., Filippov B.N., Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., **Badiev M.K.** Influence of field on frustrations in low-dimensional magnets // Book of Abstracts MISM. Moscow. 2011. P. 850.
 24. Муртазаев А.К., Камилов И.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Критические свойства фрустрированной $3d$ модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке // Сборник научных трудов «Структурные и динамические эффекты в упорядоченных средах». Уфа: РИЦ БашГУ 2006. С.8-13.
 25. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга на треугольной решетке. // Труды международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала 2007. С.60-64.
 26. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование критических свойств фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга. // Материалы V всероссийская конференция по «ФЭ – 2008». Махачкала 2008. С. 265 – 268.
 27. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Критическое поведение фрустрированных спиновых систем на треугольной решетке // Сборник трудов международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала 2009. С.6-9.
 28. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Компьютерное моделирование антиферромагнетика на треугольной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // Сборник трудов

- международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала 2009. С.42-44.
29. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.**, Магомедов Г.М., Мамаева С.М. Компьютерное моделирование фазовых переходов в антиферромагнитной модели Гейзенберга на треугольной решетке // Сборник трудов международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала 2009. С.107-109.
 30. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование критических свойств фрустрированной двумерной модели изинга на квадратной решетке // Сборник трудов международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала 2009. С.297-299.
 31. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Абуев Я.К., **Бадиев М.К.** Исследование критических свойств фрустрированной антиферромагнитной модели Гейзенберга с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей // Межвузовский сборник научных трудов «Структурные и динамические эффекты в упорядоченных средах». Уфа, 2009. С.17-24.
 32. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Компьютерное моделирование антиферромагнетика на треугольной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // Сборник трудов межрегиональной научно-технической конференции памяти профессора Валеева К.А. «Актуальные проблемы естественных и технических наук». Уфа, 2009.
 33. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Критическое поведение трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга на треугольной решетке. // Труды V Международной конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». Томск, 2009.
 34. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Компьютерное моделирование антиферромагнетика на треугольной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // Сборник трудов международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». Махачкала 2010. С.315-318.
 35. Рамазанов М.К., Муртазаев А.К., **Бадиев М.К.** Исследование фрустрированной модели Изинга с взаимодействиями вторых ближайших соседей // Сборник трудов международной конференции «Инноватика-2011». Том 2. Махачкала. 2011. С. 28-29.
 36. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., **Бадиев М.К.** Исследование трехмерной фрустрированной модели Гейзенберга с взаимодействиями вторых ближайших соседей // Сборник трудов международной конференции «Инноватика-2011». Том 2. Махачкала. 2011. С. 24-25.

Подписано в печать
Тираж 100 экз. Бесплатно.
Отпечатано в Институте физики ДНЦ РАН.
367003, г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 94.